Examenul naţional de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z+\frac{13}{z}=3+2i+\frac{13}{3+2i}=3+2i+\frac{13(3-2i)}{9-4i^2}=3+2i+\frac{13(3-2i)}{13}=$	**3p**
	$=3+2i+3-2i=6$	**2p**
2.	$f(g(a))=f(g(-a))\Leftrightarrow 3g(a)-5=3g(-a)-5\Leftrightarrow g(a)=g(-a)$	**3p**
	$a^2+a=a^2-a\Leftrightarrow a=0$	**2p**
3.	$3^{3x+5}=3^2\cdot 3^{x+1}\Leftrightarrow 3^{3x+5}=3^{x+3}$	**3p**
	$3x+5=x+3\Rightarrow x=-1$	**2p**
4.	Numărul submulțimilor lui A este egal cu 2^4, deci sunt 16 cazuri posibile	**2p**
	Numărul submulțimilor lui A cu un număr impar de elemente este egal cu $C_4^1+C_4^3=8$, deci sunt 8 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$	**1p**
5.	$M(2,4)$ este mijlocul segmentului AB, deci $m_{CM}=-1$	**2p**
	$d \parallel CM\Rightarrow m_d=-1$, deci ecuația dreptei d este $y-y_A=m_d(x-x_A)$, adică $y=-x+4$	**3p**
6.	$AC^2=AB^2+BC^2-2AB\cdot BC\cdot\cos B\Rightarrow 12=4+BC^2-2\cdot 2\cdot BC\cdot\frac{1}{2}$	**3p**
	$BC^2-2BC-8=0\Rightarrow BC=4$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det(A(x))=\begin{vmatrix}1+2x & 0 & -4x\\ 0 & a & 0\\ x & 0 & 1-2x\end{vmatrix}=a(1+2x)(1-2x)+4ax^2=$	**3p**
	$=a(1-4x^2)+4ax^2=a$, pentru orice număr real x	**2p**
b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}1+2(x+y) & 0 & -4(x+y)\\ 0 & a^2 & 0\\ x+y & 0 & 1-2(x+y)\end{pmatrix}$, $A(x+y)=\begin{pmatrix}1+2(x+y) & 0 & -4(x+y)\\ 0 & a & 0\\ x+y & 0 & 1-2(x+y)\end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
	$A(x)\cdot A(y)=A(x+y)\Rightarrow a^2=a$ și, cum a un număr real nenul, obținem $a=1$	**2p**
c)	$A(-2)\cdot A(2)=A(0)=I_3$, deci $A(-2)$ este inversa matricei $A(2)$	**2p**
	$X=A(-2)\cdot A(3)\Rightarrow X=A(1)\Rightarrow X=\begin{pmatrix}3 & 0 & -4\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}$	**3p**
2.a)	$0*2021=\log_2\left(2^0+2^{2021}-1\right)=\log_2\left(1+2^{2021}-1\right)=$	**3p**
	$=\log_2 2^{2021}=2021$	**2p**

b)	$x*e=x\Leftrightarrow\log_2\left(2^x+2^e-1\right)=x\Leftrightarrow 2^x+2^e-1=2^x$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, de unde obținem $2^e=1$, deci $e=0\in M$	**3p**
	Cum $0*x=\log_2\left(1+2^x-1\right)=x$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$, obținem că $e=0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	**2p**
c)	$x*(x+1)*(x+2)=\log_2\left(2^x+2^{x+1}+2^{x+2}-2\right)$, $x\in M$	**3p**
	$\log_2\left(2^x+2^{x+1}+2^{x+2}-2\right)=\log_2 54\Rightarrow 7\cdot 2^x-2=54\Rightarrow 2^x=8$, deci $x=3$, care convine	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}}\cdot\left(\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right)'=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{x^2+1}{x^2+x+1}}\cdot\frac{(2x+1)\left(x^2+1\right)-\left(x^2+x+1\right)\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{1-x^2}{2\left(x^2+1\right)\sqrt{\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+1\right)}}$, $x\in\mathbb{R}$	**3p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x^2}}}=1$	**3p**
	Dreapta de ecuație $y=1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcţiei f	**2p**
c)	$f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ descrescătoare pe $(-\infty,-1]$, $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,1]\Rightarrow f$ crescătoare pe $[-1,1]$ și $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ descrescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$f(-1)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(1)=\frac{\sqrt{6}}{2}$ și $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1\Rightarrow\frac{\sqrt{2}}{2}\le f(x)\le\frac{\sqrt{6}}{2}$, pentru orice număr real x, deci $\sqrt{2}\le f(x)+f(-x)\le\sqrt{6}\Rightarrow\sqrt{2}\le\sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}}+\sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}}\le\sqrt{6}$, pentru orice număr real x	**3p**
2.a)	$\int_1^3\left(f(x)+2\ln x\right)dx=\int_1^3\left(2x+3-2\ln x+2\ln x\right)dx=\int_1^3(2x+3)dx=\left.\left(x^2+3x\right)\right\|_1^3=$	**3p**
	$=9+9-1-3=14$	**2p**
b)	$\int_1^e\left(2x+3-f(x)\right)dx=2\int_1^e\ln x\,dx=\left.2x\ln x\right\|_1^e-2\int_1^e x\cdot\frac{1}{x}dx=$	**3p**
	$=2e-2(e-1)=2$	**2p**
c)	$\int_0^1 x^2 f\left(x^3+1\right)dx=\frac{1}{3}\int_1^2 f(t)\,dt=\frac{1}{3}\left(\int_1^2(2t+3)\,dt-2\int_1^2\ln t\,dt\right)=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}\left.\left(t^2+3t-2t\ln t+2t\right)\right\|_1^2=\frac{1}{3}(4+6-4\ln 2+4-1-3-2)=\frac{4(2-\ln 2)}{3}$	**2p**